УДК 517.956

ЗАДАЧА ДАРБУ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БИАНКИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А.Н. Миронов[1]

1 *miro73@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Елабужский институт

Доказаны существование и единственность решения задачи Дарбу. Построено решение задачи Дарбу в терминах функции, аналогичной функции Римана-Адамара.

Ключевые слова: уравнение Бианки, задача Дарбу, функция Римана-Адамара.

Задача Дарбу для гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными рассматривалась многими авторами. Можно указать работы [1, с. 228–233], [2]–[7].

Здесь изучается существование и единственность решения задачи Дарбу, а также вопрос о построении соответствующей функции Римана-Адамара для уравнения Бианки третьего порядка

$$u_{xyz} + \sum_{\substack{i=0\\ \\ i+j+k<3}}^{1} \sum_{j=0}^{1} \sum_{k=0}^{1} a_{ijk}(x,y,z)\, u_{x^i y^j z^k} = f(x,y,z), \tag{1}$$

которое рассмотрено, например, в работах [8]–[13]. При этом в [9], [11] рассмотрены постановки задач типа Дарбу для некоторых частных случаев уравнения Бианки.

Определим класс функций $C^{(k,l,m)}$ следующим образом: функция $u \in C^{(k_1,k_2,k_3)}$, если существуют непрерывные производные $\dfrac{\partial^{r_1+r_2+r_3} u}{\partial x^{r_1} \partial y^{r_2} \partial z^{r_3}}$ $(r_i = 0,\ldots,k_i)$. Решение класса $C^{(1,1,1)}$ назовем регулярным. Пусть D — область, ограниченная плоскостями $x=0,\ y=0,\ y=y_0>0,\ z=x,\ z=z_0>0$. Считаем, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям гладкости $a_{ijk} \in C^{(i,j,k)}(\overline{D})$. Обозначим через X, Y, T грани D при $x=0,\ y=0,\ z=x$ соответственно.

Задача Дарбу. *В области D найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям*

$$\begin{gathered} u|_{\overline{X}} = \varphi_1(y,z), \quad u|_{\overline{Y}} = \varphi_2(x,z), \quad u|_{\overline{T}} = \psi(x,y), \\ \varphi_1(y,0) = \psi(0,y),\ \varphi_2(x,x) = \psi(x,0),\ \varphi_1(0,z) = \varphi_2(0,z), \\ \varphi_1 \in C^{(1,1)}(\overline{X}), \quad \varphi_2 \in C^{(1,1)}(\overline{Y}), \quad \psi \in C^{(1,1)}(\overline{T}). \end{gathered} \tag{2}$$

С использованием известную формулу решения задачи Гурса для уравнения Бианки [12, с. 28] как представление произвольного регулярного решения уравнения (1), получено интегральное уравнение Вольтерры второго рода для определения условия Гурса $u(x,y,z_0)$, из существования и единственности решения которого следует существование и единственность решения задачи Дарбу (1)–(2).

Задача Гурса. *Найти в параллелепипеде $G = \{x_1 < x < x_2,\ y_1 < y < y_2,\ z_1 < z < z_2\}$ регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$\begin{gathered} u|_{\overline{X}} = \varphi_1(y,z), \quad u|_{\overline{Y}} = \varphi_2(x,z), \quad u|_{\overline{Z}} = \varphi_3(x,y), \\ \varphi_1(y,z_1) = \varphi_3(x_1,y),\ \varphi_2(x,z_1) = \varphi_3(x,y_1),\ \varphi_1(x_1,z) = \varphi_2(x_1,z), \\ \varphi_1 \in C^{(1,1)}(\overline{X_1}), \quad \varphi_2 \in C^{(1,1)}(\overline{Y_1}), \quad \varphi_3 \in C^{(1,1)}(\overline{Z_1}). \end{gathered}$$

Здесь $X_1,\ Y_1,\ Z_1$ *— грани* G *при* $x = x_1,\ y = y_1,\ z = z_1$.

Решение задачи Гурса существует и единственно [12, с. 25–26].

Кратко опишем построение формулы решения задачи Гурса [8], [12, с. 28]. Рассмотрим интегральное уравнение

$$v(x,y,z) - \int_\zeta^z a_{110}(x,y,\gamma)v(x,y,\gamma)d\gamma -$$
$$-\int_\xi^x a_{011}(\alpha,y,z)v(\alpha,y,z)d\alpha - \int_\eta^y a_{101}(x,\beta,z)v(x,\beta,z)d\beta +$$
$$+\int_\eta^y\int_\zeta^z a_{100}(x,\beta,\gamma)v(x,\beta,\gamma)d\gamma d\beta + \int_\xi^x\int_\zeta^z a_{010}(\alpha,y,\gamma)v(\alpha,y,\gamma)d\gamma d\alpha +$$
$$+\int_\xi^x\int_\eta^y a_{001}(\alpha,\beta,z)v(\alpha,\beta,z)d\beta d\alpha -$$
$$-\int_\xi^x\int_\eta^y\int_\zeta^z a_{000}(\alpha,\beta,\gamma)v(\alpha,\beta,\gamma)d\gamma d\beta d\alpha = 1. \tag{3}$$

Решение v указанного уравнения существует и единственно, это решение называют функцией Римана для (1) [8], [9]. Очевидно, v зависит от ξ,η,ζ. Если нужно подчеркнуть эту зависимость, пишут $v = R(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$.

Непосредственным вычислением можно убедиться в справедливости тождества

$$\begin{aligned}(uR)_{xyz} \equiv RL(u) + ([R_z - a_{110}R]u)_{xy} + ([R_x - a_{011}R]u)_{yz} +\\ + ([R_y - a_{101}R]u)_{xz} - ([R_{yz} - (a_{110}R)_y - (a_{101}R)_z + a_{100}R]u)_x -\\ - ([R_{xz} - (a_{110}R)_x - (a_{011}R)_z + a_{010}R]u)_y - ([R_{xy} - (a_{011}R)_y - (a_{101}R)_x + a_{001}R]u)_z,\end{aligned} \tag{4}$$

где a_{ijk} зависят от (x,y,z), $R = R(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$ — функция Римана, а $u(x,y,z)$ — любая функция из $C^{(1,1,1)}$.

Введем обозначения

$$\begin{gathered}A_{100} = R_x - a_{011}R, \quad A_{010} = R_y - a_{101}R, \quad A_{001} = R_z - a_{110}R,\\ A_{110} = R_{xy} - (a_{011}R)_y - (a_{101}R)_x + a_{001}R,\\ A_{101} = R_{xz} - (a_{110}R)_x - (a_{011}R)_z + a_{010}R,\\ A_{011} = R_{yz} - (a_{110}R)_y - (a_{101}R)_z + a_{100}R.\end{gathered}$$

Путем дифференцирования уравнения (3) нетрудно убедиться в справедливости тождеств

$$\begin{array}{ll} A_{100} \equiv 0 \text{ при } y=\eta,\ z=\zeta; & A_{010} \equiv 0 \text{ при } x=\xi,\ z=\zeta;\\ A_{001} \equiv 0 \text{ при } x=\xi,\ y=\eta; & A_{110} \equiv 0 \text{ при } z=\zeta;\\ A_{101} \equiv 0 \text{ при } y=\eta; & A_{011} \equiv 0 \text{ при } x=\xi.\end{array} \tag{5}$$

Считая в тождестве (4) функцию $u(x,y,z)$ решением уравнения (1), меняя ролями переменные (x,ξ), (y,η), (z,ζ) и вычисляя затем тройной интеграл по ξ,η,ζ в пределах $x_1 < \xi < x,\ y_1 < \eta < y,\ z_1 < \zeta < z$ с учетом (5), получим

$$u(x,y,z) = R(x,y,z_1)\varphi_3(x,y) + R(x,y_1,z)\varphi_2(x,z) +$$

$$+R(x_1,y,z)\varphi_1(y,z)-R(x,y_1,z_1)\varphi_3(x,y_1)-$$

$$-R(x_1,y,z_1)\varphi_3(x_1,y)-R(x_1,y_1,z)\varphi_2(x_1,z)+R(x_1,y_1,z_1)\varphi_1(y_1,z_1)+$$

$$+\int_{x_1}^{x}[A_{100}(\alpha,y_1,z_1)\varphi_3(\alpha,y_1)-A_{100}(\alpha,y,z_1)\varphi_3(\alpha,y)-A_{100}(\alpha,y_1,z)\varphi_2(\alpha,z)]d\alpha+$$

$$+\int_{y_1}^{y}[A_{010}(x_1,\beta,y_1)\varphi_3(x_1,\beta)-A_{010}(x,\beta,z_1)\varphi_3(x,\beta)-A_{010}(x_1,\beta,z)\varphi_1(\beta,z)]d\beta+$$

$$+\int_{z_1}^{z}[A_{001}(x_1,y_1,\gamma)\varphi_2(y_1,\gamma)-A_{001}(x,y_1,\gamma)\varphi_2(x,\gamma)-A_{001}(x_1,y,\gamma)\varphi_1(y,\gamma)]d\gamma+$$

$$+\int_{x_1}^{x}\int_{y_1}^{y}A_{110}(\alpha,\beta,z_1)\varphi_3(\alpha,\beta)d\beta d\alpha+\int_{x_1}^{x}\int_{z_1}^{z}A_{101}(\alpha,y_0,\gamma)\varphi_2(\alpha,\gamma)d\gamma d\alpha+$$

$$+\int_{y_1}^{y}\int_{z_1}^{z}A_{011}(x_1,\beta,\gamma)\varphi_1(\beta,\gamma)d\gamma d\beta+ \tag{6}$$

$$+\int_{x_1}^{x}\int_{y_1}^{y}\int_{z_1}^{z}R(\alpha,\beta,\gamma)f(\alpha,\beta,\gamma)d\gamma d\beta d\alpha.$$

Здесь у R, A_{ijk} указана только первая тройка аргументов, вторая всегда есть (x,y,z).

Докажем теперь существование и единственность решения задачи Дарбу путем ее редукции к задаче Гурса в области D: найти регулярное решение уравнения (1) в D по условиям на плоскостях $x=0$, $y=0$, $z=z_0$. Для этого по данным задачи Дарбу надо однозначно определить недостающее условие задачи Гурса, то есть функцию $u(x,y,z_0)$.

Положим в формуле (6) $x_1=0$, $y_1=0$, $z_1=z_0$, $z=x$. Тогда левая часть формулы (6) $u(x,y,z)$ обращается в $\psi(x,y)$, а сама формула (6) записывается в виде

$$R(x,y,z_0)u(x,y,z_0)-\int_0^x A_{100}(\alpha,y,z_0)u(\alpha,y,z_0)d\alpha-$$

$$-\int_0^y A_{010}(x,\beta,z_0)u(x,\beta,z_0)d\beta+\int_0^x\int_0^y A_{110}(\alpha,\beta,z_0)u(\alpha,\beta,z_0)d\beta d\alpha=F, \tag{7}$$

где правая часть F — известная функция (выражающаяся через $\varphi_1(y,z)$, $\varphi_2(x,z)$). Уравнение (7) — интегральное уравнение Вольтерры второго рода, решение которого $u(x,y,z_0)$ существует и единственно [12, с. 20–25]. Действительно, из интегрального уравнения (3) для функции Римана следует

$$R(x,y,z,x,y,\zeta)=\exp\Big(\int_\zeta^z a_{110}(x,y,\gamma)d\gamma\Big)>0.$$

Таким образом, задача Дарбу однозначно редуцируется к задаче Гурса, то есть решение задачи Дарбу существует и единственно.

Далее построена формула решения задачи Дарбу для произвольного уравнения (1) в терминах функции, аналогичной функции Римана-Адамара [7].

Литература

1. Бицадзе А. В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* – М.: Наука, 1981. – 448 с.

2. Моисеев Е. И. *Об одном интегральном представлении решения задачи Дарбу* // Матем. заметки. – 1982. – Т. 32. – Вып. 2. – С. 175–186.

3. Моисеев Е. И. *О приближении классического решения задачи Дарбу гладкими решениями* // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20. – № 1. – С. 73–87.

4. Моисеев Е. И. *Уравнения смешанного типа со спектральным параметром.* – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 150 с.

5. Сабитов К. Б. *Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений. I* // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26. – № 6. – С. 1023–1032.

6. Сабитов К. Б., Шарафутдинова Г. Г. *Задачи Коши–Гурса для вырождающегося гиперболического уравнения* // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 5. – С. 21–29.

7. Джохадзе О. М., Харибегашвили С. С. *Некоторые свойства функций Римана и Римана-Адамара для линейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения* // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47. – № 4. – С. 477–492.

8. Жегалов В. И. *Трехмерный аналог задачи Гурса* // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. Новосибирск, ИМ СО АН СССР. – 1990. – С. 94–98.

9. Волкодавов В. Ф., Николаев Н. Я., Быстрова О. К., Захаров В. Н. *Функции Римана для некоторых дифференциальных уравнений в n-мерном евклидовом пространстве и их применения.* – Самара: Самарский университет, 1995. – 76 с.

10. Севастьянов В. А. *Метод Римана для трехмерного гиперболического уравнения третьего порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 69–73.

11. Джохадзе О. М. *Задача типа Дарбу в трехгранном угле для уравнения третьего порядка гиперболического типа* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 3. – С. 22–30.

12. Жегалов В. И., Миронов А. Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.* – Казань: Изд-во Казанск. матем. общ-ва, 2001. – 226 с.

13. Миронов А. Н. *Некоторые классы уравнений Бианки третьего порядка* // Матем. заметки. – 2013. – Т. 94. – Вып. 3. – С. 389–400.

THE DARBOUX PROBLEM FOR THE BIANCHI EQUATION OF THIRD ORDER

A.N. Mironov

We prove existence and uniqueness of solutions of the Darboux problem. We construct a solution of the problem in terms of an analog of the Riemann-Hadamard function.

Keywords: Bianchi equation, Darboux problem, Riemann-Hadamard function.